Условия, решения, критерии 9-10 класс

№1

В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце - снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?

Ответ: Может.

Пример

81	82	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2090
71	72	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
61	62	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
51	52	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
41	42	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
31	32	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
21	22	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	5	6	7	8	9

$2S = 101646, S = 50823$

Сумма чисел в центральном квадрате 5×5 равна 51125.

Критерии

– Попытка доказывать неверный ответ.

± Наличие одинаковых чисел в примере.

+/2 Пример, содержащий верную идею построения таблицы (большие числа в верхнем правом квадрате 7×7), но неверный из-за вычислительной ошибки.

+ Отсутствие вычислений, подтверждающих верный пример.

№2

Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

Ответ: $90°$.

Доказательство. Докажем, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают.

Обозначим точки касания T_B и T_D соответственно. Тогда

$$|AT_B| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \qquad |AT_D| = \frac{|AD| + |AC| - |DC|}{2}.$$

Из описанности четырёхугольника $ABCD$ следует равенство $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, а это равносильно равенству $|AT_B| = |AT_D|$.

Теперь легко видеть, что картинка однозначно задается радиусом вписанных окружностей треугольников ABC и ADC и расстояниями от точки касания до точек A и C. Значит, картинка переходит в себя при симметрии относительно прямой AC, при этом точки B и D меняются местами. Но это означает, что прямая BD тоже переходит в себя, то есть она перпендикулярна оси симметрии AC.

□

Критерии

– Задача решалась исходя из неверного понимания условия (например, что четырехугольник $ABCD$ вписанный вместо описанного).

– Решен любой частный случай (например, когда диагональ BD является биссектрисой угла четырёхугольника).

– Недоведённый или неверный счёт.

$\mp$ Задача решена при дополнительном предположении, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, этот факт никак не обоснован.

$\mp$ Доказано, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, нет вывода утверждения задачи из этого факта.

№3

В последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ каждое следующее число, начиная с третье-го, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.

Доказательство. Для начала докажем, что на 7 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 8. Докажем это по индукции.

База: Первое число Фибоначчи, кратное 7 – это 21, которое является 8 числом Фибоначчи.
Переход: Пусть этот факт был верен для всех чисел Фибоначчи с номерами от 1 до $8k$. Докажем, что он верен для чисел от $8k+1$ до $8k+8$. Пусть число с номером $8k-1$ имело остаток a от деления на 7 ($a \neq 0$). Тогда числа с номерами $8k+1, \ldots, 8k+8$ будут иметь следующие остатки: $a, a, 2a, 3a, 5a, a, 6a, 0$.

Теперь докажем, что на 3 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 4. Доказательство аналогично.

Следовательно, если число Фибоначчи делится на 7, то его номер делится на 8. Значит его номер делится на 4, а значит, само число обязано делиться на 3. Значит оно не может быть равно натуральной степени числа 7. $\square$

Критерии

– Перебор конечного числа чисел Фибоначчи.

$\mp$ Доказано, что на 7 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 8.

№4

Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех ребер иррациональны, а объем, полная поверхность и большая диагональ – числа целые? (*Прямоугольный параллелепипед* – это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, где $a, b, c > 0$ – фиксированные числа. *Большая диагональ* – это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)

Ответ Да, существует.

Доказательство. Нам нужно найти такие иррациональные a, b, c, что $abc \in \mathbb{Z}, 2(ab+bc+ac) \in \mathbb{Z}, a^2+b^2+c^2$ — полный квадрат. Например, нам подойдут корни многочлена $x^3 - 9x^2 + 16x - 1$. Легко видеть, что у него 3 положительных корня(достаточно посмотреть на значения в 0, 2, 4, 8), что у него нет рациональных корней (их числитель и знаменатель будут обязаны делить единицу, то есть быть равными ± 1). При этом произведение корней равно 1, сумма попарных произведений равна 16, $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ac) = 9^2 - 2 \cdot 16 = 81 - 32 = 49$, значит большая диагональ равна 7. $\square$

– Попытка доказывать неверный ответ.

$\pm$ Правильно составлен многочлен, но не доказано, что его корни вещественны и положительны.

$\pm$ Правильно составлен многочлен, но не доказано, что его корни иррациональны.

$\mp$ Идея рассмотрения многочлена.

Комментарий Обобщенная теорема Виета считается общеизвестной.

№5

Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

Доказательство. Обозначим данные числа через $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи. Также будем считать, что $S > 1$, иначе можно взять все числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k - 99S/100 = S - 99S/100 = S/100 \leqslant 1/100,$$

Для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$ обозначим через m_i наименьший индекс, для которого выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_{m_i} \geq iS/100$. Рассмотрим также разности $a_i = x_1+x_2+\cdots+x_{m_i} - iS/100$. Заметим что m_k и a_k определены корректно, поскольку для суммы всех чисел выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_k = S \geq iS/n$ для любого $i = 1, 2, \ldots, 99$. Положим $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим, что $a_i \in [0; 1)$. Действительно, по построению имеем

$$0 \leqslant a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} - iS/100 < |x_{m_i}| \leqslant 1.$$

Предположим, что все a_i лежат на отрезке $[0; 99/100]$. Тогда найдутся два различных индекса $i, j \in \{0, 1, \ldots, 99\}$, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности будем считать, что $j > i$. Заметим, что $m_j \geqslant m_i$ по определению чисел m_i. Тогда

$$|(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_j}) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i}) + jS/100 - iS/100| = |a_i - a_j| \leq 1/100. \quad (1)$$

Если $m_j > m_i$, то из неравенства (1) следует, что

$$|x_{m_i} + x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j} - (j-i)S/100| \leq 1/100.$$

Тем самым, числа $x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_{m_j}$ — искомые.

Если $m_j = m_i$, то из неравенства (1) следует, что $|(j-i)S/100| \leq 1/100$. Следовательно, $(j-i)S \leqslant 1$, значит $S \leqslant 1$.

Осталось разобрать случай, когда для некоторого i выполнено $a_i \in (99/100, 1)$. Тогда, если $m_i > 1$, имеем

$$0 < iS/100 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i-1}) = iS/100 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i-1} + x_{m_i}) + x_{m_i} \leqslant$$

$$\leqslant -99/100 + x_{m_i} \leqslant -99/100 + 1 = 1/100.$$

Тем самым, числа $x_1, x_2, \ldots, x_{m_i-1}$ — искомые.

Если $m_i = 1$, то

$$x_1 \geqslant S/100 + 99/100.$$

Следовательно,

$$1 \geqslant S/100 + 99/100,$$

$$S \leqslant 1$$

. ∎

Комментарий. Запись решения существенно упрощается, если в качестве ответа разрешается предъявлять пустое множество.

Критерии

- Рассуждения, какой должна быть сумма выбранного подмножества, без указаний, как выбрать подмножество с такой суммой или почему это возможно сделать.

- Решение задачи в частном случае (например, если $|S| \leq 2$ или для конкретного набора чисел).

№6

Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $2/3$. Для каждого набора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

Ответ: 23.

Предположим, есть набор, у которого меньше 23 больших поднаборов. Тогда все наборы из 6 гирь большие. В самом деле, путь поднабор без гири A с весом a — не большой. Тогда $a > 1/3$. У множества шести гирь (всех кроме A) есть 2^6 подмножеств. Эти подмножества разбиваются на пары с пустым пересечением, дающие в объединении все гири без A. Тогда в каждой паре хотя бы одно множество весит не менее $(1-a)/2$. То есть половина, $2^6/2 = 2^5$, из этих подмножеств весит не менее $(1-a)/2$. Тогда каждое множество из этой половины в объединении с A дает вес не менее $(1-a)/2 + a \geq 2/3$. Таким образом, мы нашли $2^5 = 32 > 23$ больших набора. Противоречие.

Итого, на данный момент мы нашли уже 8 больших поднаборов: 7-элементный и все семь 6-элементных. Посмотрим, какие 5-элементные поднмножества могут не давать большой поднабор.

Допустим, все гири без гирь A, B – не большой поднабор, и все без C, D – тоже не большой поднабор (разными буквами обозначены разные гири). Тогда, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что у дополнения к A, B есть $2^5/2 = 2^4$ подмножеств, дающих в объединении с A, B большой поднабор. То же самое с C, D: у дополнения к C, D есть $2^5/2 = 2^4$ подмножеств, дающих в объединении с C, D большой поднабор. Рассмотрим объединение этих поднаборов и оценим его мощность. Если первое множество наборов это X, второе — это Y, то $X \cap Y \leq 8$. Действительно, набор в пересечении X и Y включает в себя A, B, C, D, и число способов дополнить его несколькими из оставшихся трех – не более $2^3 = 8$. Итого, больших поднаборов $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \geq 16 + 16 - 8 = 24 > 23$. Значит, не существует таких непересекающихся пар A, B и C, D, что их пятиэлементные дополнения – не большие наборы. Или же, для любых двух 5-элементных не больших наборов их 2-элементные дополнения пересекаются. Максимальное количество попарно пересекающихся 2-элементных подмножеств множества из 7 элементов – 6. (В самом деле, пусть есть несколько попарно-пересекающихся пар элементов 7-элементного множества. Если все пары содержат некоторый один и тот же элемент, то пар не больше чем остальных элементов, то есть 6. Пусть никакой элемент не принадлежит всем парам. Рассмотрим две любые пары A, B и B, C. Должна найтись пара, не содержащая A, но чтобы она пересекалась с первыми двумя она должна быть парой B, C. Тогда больше ни одной пары добавить нельзя, итого в этом случае пар не больше чем 3.) Отсюда существует хотя бы $C_7^5 - 6 = 21 - 6 = 15$ больших пятиэлементных поднабора. Складывая это количество с 8 (число уже найденных больших поднаборов мощности > 5), получаем оценку на хотя бы 23 поднабора.

Пример. Как видно из доказательства оценки, самая тяжелая гиря должна весить строго меньше $\frac{1}{4}$ строго больше $\frac{1}{5}$. Возьмем ее вес равным $\frac{2}{9}$, или что то же самое $\frac{12}{54}$. Тогда если веса остальных гирь взять равными, они получаются по $\frac{7}{54}$. Из поднаборов без первой гири подходит только содержащий все остальные. Из поднаборов с первой гирей подходят C_6^4 гирь (первая и четыре оставшихся), C_6^5 гирь (первая и пять оставшихся) и C_6^6 гирь (первая и все шесть оставшихся). Итого, больших поднаборов $1 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 1 + 15 + 6 + 1 = 23$.

Критерии

$-$ Попытка доказать неверный ответ.

$\pm$ (1) Верная оценка, но пример отсутствует (или в нем ошибка).

$\mp$ (2) Только пример.

$\mp$ В предположении противного доказано, что все поднаборы из 6 гирь являются большими (или, что равносильно, что вес любой гири не больше $1/3$).

$+/2$ (2) и (3).

№7

Докажите, что для любых подмножеств $A_1, \ldots, A_m$ в n-элементном множестве выполнено

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

где $|A|$ обозначает число элементов в множестве A.

Доказательство. Посчитаем левую часть иным образом. Для каждого элемента множества из n элементов посчитаем, в какое количество пересечений троек $A_i \cap A_j \cap A_k$ он входит, и просуммируем эти количества по всем элементам. Легко видеть, что если элемент входит в a_i множеств, то он входит ровно в a_i^3 пересечений троек множеств (в качестве первого множества тройки годятся a_i множеств, в качестве второй и третьей — тоже a_i). Таким образом, левая часть это $n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)$. Теперь заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = |A_1| + \cdots + |A_m|$, так как обе суммы подсчитывают двумя способами одну и ту же величину: количество пар (множество; элемент множества). Итого, надо доказать:

$$n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству между средним кубическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Замечание Это одна из лемм(Lemma 6) в статье https://arxiv.org/pdf/1808.08363.pdf

□

Критерии

– Решение задачи в частном случае.

– Решение основано на неправильной формуле включения-исключения.

$\pm$ Сведено к неравенству $n^2 \cdot \sum b_i^3 \geqslant (\sum b_i)^3$.

Баллы

	0	-	-.	$\mp$	$+/2$	$\pm$	$+.$	$+$
1	0	0	2	4	8	10	12	12
2	0	0	2	5	8	10	15	15
3	0	0	2	5	8	10	15	15
4	0	0	2	5	10	15	20	20
5	0	0	4	8	16	25	32	32
6	0	0	4	8	16	22	28	28
7а	0	0	2	5	8	10	15	15
7б	0	0	4	8	13	20	25	25